Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

на тему **«Побудова функції керованості як часу руху»**

Виконала: студентка групи МП41 IV курсу,
спеціальності 113
Прикладна математика
Андрієнко Т.В.

Керівник: доктор фіз.-мат. наук
професор кафедри
прикладної математики
Коробов В.І.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук
доцент кафедри
прикладної математики
Сморцова Т. І.

Харків — 2023 рік

Анотації

Андрієнко Т.В. Побудова функції керованості як часу руху.

Розглянуто спосіб побудови функції керованості як часу руху. Для двовимірної, тривимірної та чотиривимірної канонічних систем знайдено множини параметрів, для яких значення функції керованості буде часом руху довільної точки в початок координат. Обрано деякий довільний набір параметрів, які задовільняють отриманим умовам та побудовано траєкторії з обраних початкових точок в початок координат.

Keywords: **керованість; функція керованості; функція керованості як час руху**

Andriienko T.V. Construction of controllability function as time of motion.

Method of constructing a controllability function as a function of time has been considered. For two-dimensional, three-dimensional, and four-dimensional canonical systems, such sets of parameters have been found that values of the controllability function is the time of motion from an arbitrary point to the origin. A certain arbitrary set of parameters satisfying the obtained conditions has been selected, and trajectories from the chosen initial points to the origin have been found.

Keywords: **controllability; controllability function; controllability function as the time of movement**

Зміст

Вступ

Теорія керування розвинулась протягом останніх століть і почала активно розвиватися з появою промислової революції та поширенням автоматизації процесів. Однією з задач теорії керування є задача допустимого позиційного синтезу в деякому околі Q початку координат. Яка полягає у тому, що для керованої системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(x, u)$, де $x \in R^n, u \in \Omega \subset R^r$ будується таке керування $u = u(x)$, що задовольняє заданим обмеженням $u \in \Omega$ та таке, що існує розв'язок та траєкторія системи $\dot{x} = f(x, u(x))$ з початком в довільній точці x_0, потрапляє в початок координат за деякий скінченний час $T = T(x_0)$.

Ця задача пов'язана з задачами оптимального синтезу та стабілізації. В задачі оптимального синтезу керування $u(x)$ обирається таким чином, щоб час потрапляння з кожної точки в початок координат був найменшим. Її розв'язком є розв'язок рівняння Беллмана

$$\min_{u\in\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T(t,x)}{\partial x_i}f_i(x,u)\right) = -1, \tag{0.1}$$

знаходження якого є доволі складним. У задачі стабілізації обирається така функція $u(x)$, що розв'язок є асимптотично стійким.

Для розв'язання поставленої задачі в 1979 році Коробовим В.І. було запропоновано метод функції керованості в статті [1] та розвинуто в подальших роботах. Опис даного методу, теорема та теоретичні відомості необхідні для дослідження описані в даній роботі. У роботах [2,3] була отримана функція керованості як час руху з деякої початкової точки в початок координат. Та було знайдено множину керувань, які розв'язують задачу синтезу. Розширену множину керувань було запропоновано для двовимірної канонічної системи в [4]. Тема функції керованості як часу рух розглядається в роботі [5].

В даному дослідженні розглядаються задачі пов'язані із методом функції керованості, зокрема знаходження множини допустимих параметрів при яких функція керованості буде часом руху із довільної точки в початок координат.

В першому розділі надається опис методу функції керованості та формулюються теореми і твердження, на яких базуються подальші дослідження. В другому розділі роботи описано алгоритм побудови функції керованості як часу руху. Наводяться результати та хід розв'язання цієї задачі для двовимірної тривимірної та чотиривимірної систем.

Розділ 1. Метод функції керованості

1.1. Постановка задачі синтезу

Однією з задач теорії керування є задача допустимого позиційного синтезу в деякому околі Q початку координат. Нехай

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

керована система диференціальних рівнянь, де $x \in R^n, u \in \Omega \subset R^r$. Задача полягає у побудові такого керування $u = u(x)$, що задовольняє заданим обмеженням $u \in \Omega$ та такого, що існує розв'язок та траєкторія системи

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{1.2}$$

з початком в довільній точці x_0, потрапляє в початок координат за деякий скінченний час $T = T(x_0)$.

Зауважимо, оскільки через початок координат проходить нескінченна кількість траєкторій системи (1.1) і час руху по кожній із них скінчений, то права частина рівняння не може задовольняти умовам теореми єдиності.

Для розв'язання поставленої задачі в 1979 році Коробовим В.І. було запропоновано метод функції керованості [1].

1.2. Метод функції керованості

Для автономних керованих систем вигляду (1.1) вірною є наступна теорема [1]:

Теорема 1.1. *Розглянемо керований процес, що описується рівнянням (1.1), де* $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, *вектор функція* $f(x, u)$ *в кожній точці області* $\{(x, u) : 0 < \rho_1 \leq ||x|| \leq \rho_2, u \in \Omega\}$ *задовольняє умові Ліпшиця*

$$\|f(x', u') - f(x'', u'')\| \leq L_1(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Нехай існує функція $\Theta(x)$, яка задовольняє умовам:

1. $\Theta(x) \geq 0$ *при* $x \neq 0$ *і* $\Theta(0) = 0$;

2. $\Theta(x)$ *неперервна всюди і неперервно диференційовна всюди крім, можливо точки* $x = 0$;

3. *існує число* $c > 0$ *таке, що множина* $\mathbb{Q} = \{x : \Theta(x) \leq c\}$ *є обмеженою і* $\mathbb{Q} \subset \{x : \|x\| < R\}$;

4. *існує функція* $u(x) \in \Omega$ *при* $x \in \mathbb{Q}$, *яка задовольняє нерівності*

$$\dot{\Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$$

при деяких $\alpha > 0$ *і* $\beta > 0$, *причому* $u(x)$ *в кожній області* $K(\rho_1, \rho_2) \leq \{x \in \mathbb{Q} : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$ *задовольняє умові Ліпшиця, тобто*

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho_1, \rho_2)\|x'' - x'\| \; \forall\, x', x'' \in K(\rho_1, \rho_2),$$

причому $L_2(\rho_1, \rho_2) \to +\infty$ *при* $\rho_1 \to 0$.

Тоді траєкторія $x(t)$ *системи* $\dot{x} = f(x, u(x))$, *з початком в довільній точці* $x_0 \in \mathbb{Q}$ *в момент часу* $t = 0$, *потрапляє в точку* $x_1 = 0$ *в деякий момент часу* $T(x_0) \leq (\alpha/\beta)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, $x(t) \in \mathbb{Q}$, $x(t) = 0$ *при* $x(t) = 0$ *при* $t > T(x_0)$, *причому, якщо* $\alpha = \infty$, *то* $x(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Функція $\Theta(x)$ називається функцією керованості і є аналогом функції Ляпунова, умови 1-3 даної теореми збігаються з умовами теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість. Зауважимо, що виконання умови 4 при $\alpha > 0$ забезпечує скінченність часу потрапляння довільної точки в початок координат. Якщо $\alpha = \infty$ функція $\Theta(x)$ буде функцією Ляпунова отриманої системи.

У випадку коли $\alpha = \beta = 1$, а замість нерівності виконується рівність, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) = -1, \tag{1.3}$$

функція керованості $\Theta(x)$ буде часом руху $T(x)$ із довільної точки в початок координат.

Якщо крім цього $u(x)$ така, що виконується рівняння Беллмана:

$$\min_{u \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \right) = -1, \tag{1.4}$$

функція $\Theta(x)$ буде також часом швидкодії.

1.3. Розв'язок задачі синтеза для канонічної системи

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad ... \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \tag{1.5}$$

з обмеженням на керування $|u| \leq d$. Будемо називати цю систему канонічною. Дана система є центральною в методі, що розглядається. Для канонічної системи розв'язок задачі синтезу може бути знайдений у всьому просторі $\mathbb{R}^n$ і розв'язання задачі синтезу для довільної лінійної системи може бути зведено до розв'язання задачі для канонічної.

Коротко приведемо метод розв'язання задачі синтезу для канонічної системи [1]. Оберемо допоміжне керування $u_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_nx_n = (a, x)$ таке, щоб нульовий розв'язок системи $\dot{x} = Ax + bu = A_1x$ був асимптотично стійким. В цьому випадку для даної системи існує деяка функція Ляпунова $V(x)$, яку можна записати у вигляді деякої додатно визначеної квадратичної форми:

$$V(x) = (Fx, x). \tag{1.6}$$

Функцію керованості $\Theta(x)$ в кожній точці $x \neq 0$ задамо як додатний розв'язок рівняння

$$2a_0\Theta = (F(\Theta)x, x), \tag{1.7}$$

де a_0 поки що довільне додатне число, $(F(\Theta)x, x) = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$.

$$D(\Theta) = \text{diag}\left(\Theta^{-\frac{m+n-2i+1}{2\alpha}}\right)_{i=1}^{n}$$

а числа $m \in \mathbb{N}, \alpha \geq 1$ обираються так, щоб матриця

$$F^\alpha \equiv F - H^\alpha F - FH^\alpha = \left(\left(1 + \frac{n+m-i-j+1}{\alpha}\right) f_{ij}\right)_{i,j=1}^{n},$$

$$\text{де } H^\alpha = \text{diag}\left(-\frac{m+n-2i+1}{2\alpha}\right)_{i=1}^{n},$$

була додатно визначеною.

Таким чином відмітимо, що на відміну від функції Ляпунова, що шукається в явному вигляді функція керованості в кожній точці задається як розв'язок неявного рівняння.

Виконання описаних вище умов гарантує існування та єдиність додатного кореня Θ_0 функції

$$\Phi(\Theta, x) = 2a_0\Theta - (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$$

для довільного $x = x_0$ та додатність похідної цієї функції в точці Θ_0. З цього та з теореми про неявну функцію випливає неперервність та неперервна диференційовність при $x \neq 0$ функції $\Theta(x)$.

Зауважимо, що окрім додатного дана функція має також єдиний від'ємний корінь.

Керування $u(x)$, що є розв'язком задачі синтезу матиме наступний вигляд

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i}{\Theta^{\frac{n-i+1}{\alpha}}(x)}. \tag{1.8}$$

Для виконання заданих обмежень число a_0 обирається так, щоб виконувалась умова: $0 < \sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)} \leq d$.

З вигляду $u(x)$ видно, що функція керованості також входить у керування. Тому для знаходження конкретної траєкторії з початком в точці x_0 необхідно знайти розв'язок рівняння (1.7) $\Theta(x_0)$, та чисельно розв'язати задачу Коші розмірності $n+1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = u(x), \\ \dot{\Theta} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)). \end{cases} \tag{1.9}$$

Розділ 2. Функція керованості як час руху

2.1. Побудова функції керованості як часу руху

Як уже було зазначено вище, для скінченності часу руху має виконуватись оцінка:

$$\dot{\Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \tag{2.1}$$

Частинним випадком цієї нерівності є рівняння при $\alpha = \beta = 1$

$$\dot{\Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) = -1 \tag{2.2}$$

У цьому випадку функція керованості є часом руху із точки x у початок координат.

Якщо шукати Θ, як єдиний додатній розв'язок рівняння [6]:

$$2a_0 \Theta^{\nu} = (N_f^{-1}(\Theta)x, x), \quad a_0 > 0, \nu \geq 1, \text{ де}$$

$$N_f(\Theta) = \int_0^{\infty} f(t/\Theta) e^{-At} B B^* e^{-A^* t} dt \tag{2.3}$$

та обрати функцію $f(s) = \begin{cases} (1-s)^{\nu}, 0 \leq s \leq 1 \\ 0, \quad s > 1 \end{cases}$ і задати керування $u(x) = -\dfrac{1}{2} B^* N_f^{-1}(\Theta(x))x$, то функція керованості буде часом руху із довільної точки x у початок координат. Але ми хочемо описати усю множину допустимих параметрів, тому будемо використовувати інший підхід.

Розглянемо канонічну систему з обмеженнями на керування $|u| \leq d$. Як і в основному методі оберемо керування у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i}{\Theta^{n-i+1}(x)}. \tag{2.4}$$

Позначимо $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^*, a_i < 0$.

А функція керованості при $x \neq 0$ визначена як єдиний додатній корінь рівняння

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$$

де $D(\Theta) = diag(\Theta^{-\frac{-2n-2i+1}{2}})_{i=1}^n$, матриця $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$ додатно визначена, а $a_0 > 0$ буде обиратися так, щоб виконувались обмеження на керування. Значення для a_0 виражається [1] з рівняння $2a_0 = \dfrac{1}{(F^{-1}a, a)}$. Якщо $x = 0$ покладемо $\Theta(x) = 0$.

Покладемо $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$. Тоді функція керованості задовільняє

$$2a_0\Theta(x) = (Fy(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)). \tag{2.5}$$

Похідна функції керованості має вигляд

$$\dot{\Theta}(x) = \frac{((F(A_0 + b_0a^*) + (A_0 + b_0a^*)^*F)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}{((F - HF - FH)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)))}, \tag{2.6}$$

де $b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, $H = diag(-\dfrac{2n-2i+1}{2})_{i=1}^n$.

Крім того, матриця $F^1 = F - HF - FH$ додатно визначена [1] та має наступний вигляд

$$F^1 = ((2n + 2 - i - j)f_{ij})_{i,j=1}^n. \tag{2.7}$$

Прирівнявши вираз для похідної (2.6) до -1, отримаємо матричне рівняння

$$F\left(A_0 + b_0a^* + \frac{1}{2}I - H\right) + \left(A_0 + b_0a^* + \frac{1}{2}I - H\right)^* F = 0.$$

Позначимо $A = \left(A_0 + b_0a^* + \dfrac{1}{2}I - H\right)$. Вона має такий вигляд

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1} & 1 + a_n \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Отримаємо матричне рівняння

$$FA + A^*F = 0. \tag{2.9}$$

Наша задача: обрати матрицю F і вектор-стовпець a так, щоб виконувалась матрична рівність. Тоді функція керованості $\Theta(x)$ буде часом руху із точки x у початок координат.

Ця задача розглядалась в роботах [2, 3], там було виділено окремий випадок, коли матриця F^{-1} мала подання у вигляді $F^{-1} = D_n C D_n$. Причому матриця C - Ганкелева матриця $C = (c_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$, а $D_n = diag((-1)^{n-i}/(n-i)!)_{i=1}^{n}$. У цій роботі розглядається цілий клас функцій керованості без обмежень на вигляд F^{-1}. Перейдемо до побудови рівняння для функції керованості.

Перейдемо до побудови функції керованості. У загальному випадку складаємо матриці F та A. Із леми [1] отримуємо $a_n = -\dfrac{n(n+1)}{2}$. Розглянемо $det(A - \lambda E)$. Помножимо рівняння (2.9) з обох боків на F^{-1}. Отримуємо $F^{\frac{1}{2}}AF^{-\frac{1}{2}} + F^{-\frac{1}{2}}A^*F^{\frac{1}{2}} = 0$ або $F^{\frac{1}{2}}AF^{-\frac{1}{2}} = -(F^{\frac{1}{2}}AF^{-\frac{1}{2}})^*$. Матриця $F^{\frac{1}{2}}AF^{-\frac{1}{2}}$ кососиметрична і подібна до A, тому дійсні частини власних значень A рівні нулю. Усі коефіцієнти при λ^{n-k} нульові, при k непарних та $k \leq n$. З цих рівнянь можемо отримати умови з яких визначаються параметри a_i. Підставляємо відомі параметри у матрицю A та розв'язуємо рівняння (2.9). Зауважимо, що матриця FA - кососиметрична, тому на діагоналі стоять нулі. Отримуємо матрицю F, яка за умовою додатно визначена. Розраховуємо F^1 з (2.7). Користуємось критерієм Сильвестра для матриць F та F^1. Знаходимо оцінки для елементів матриці F та параметрів a_i.

Таким чином ми описуємо цілий клас функцій керованості $\Theta(x)$ та керування $u(x)$ (2.4), що переводить деяку початкову точку в початок координат. Причому функція керованості є часом руху. Далі розв'язуємо канонічну систему (1.1), яка зводиться до рівняння типа Ейлера $(\Theta_0 - t)^n x_1^{(n)} - (\Theta_0 - t)^{n-1} a_n x_1^{(n-1)} - ... - a_1 x_1 = 0$. Характеристичне рівняння можна отримати, якщо шукати розв'язок у вигляді $x_1(t) = (\Theta_0 - t)^{\lambda}$. В зв'язку з цим можна отримати розв'язки в аналітичній формі. Розглянемо двовимірний, тривимірний та чотиривимірний випадки.

2.1.1. Побудова функції керованості у двовимірному випадку

Розглянемо рішення задачі синтезу.Знайдемо функцію керованості $\Theta(x)$ та на її основі побудуємо керування $u(x)$, яке переводить довільну задану точку в початок координат.

Система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{2.10}$$

Теорема 2.1. *Нехай $a_1 < -4.5$. Функція керованості $\Theta = \Theta(x)$ визначена як єдиний додатній корінь рівняння*

$$-\frac{4 + a_1}{a_1(3 + a1)}\Theta^4 = -a_1 x_1^2 + 4x_1x_2\Theta + x_2^2\Theta^2, \tag{2.11}$$

при $x = 0$ покладемо $\Theta(0) = 0$.

Тоді керування вигляду

$$u(x) = \frac{a_1 x_1}{\Theta^2(x)} - \frac{3x_2}{\Theta(x)}. \tag{2.12}$$

переводить довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}^2$ в початок координат за час $\Theta(x_0)$.

Дійсно, у цьому випадку

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a_1 & a_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки дійсні частини власних значень рівні нулю, то коефіцієнти при парних степенях λ рівні 0. Маємо

$$det(A - \lambda E) = 2 - a_1 + 2a_2 - (a_2 + 3)\lambda + \lambda^2,$$

тоді $a_2 = -3$.

Рівняння (2.9) має вигляд

$$\begin{cases} 2f_{11} + a_1 f_{12} = 0, \\ f_{12} + (a_2 + 1) f_{22} = 0, \\ f_{11} + (a_2 + 3) f_{12} + a_1 f_{22} = 0. \end{cases}$$

Тоді маємо

$$F = \begin{pmatrix} -a_1 f_{22} & 2f_{22} \\ 2f_{22} & f_{22} \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a_1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

За формулою (2.7) розраховуємо

$$F^1 = \begin{pmatrix} -4a_1 f_{22} & 6f_{22} \\ 6f_{22} & 2f_{22} \end{pmatrix}.$$

Застосовуємо критерій Сильвестра для F та F^1 та отримуємо

$$a_1 < -\frac{9}{2}, \quad f_{22} > 0. \tag{2.14}$$

Отже, з рівняння (2.5) при $y(\Theta(x), x) = (x_1 \Theta^{-3/2}, x_2 \Theta^{-1/2})$ та $2a_0 = \dfrac{1}{(F^{-1}a, a)}$ приймає вигляд (2.11). Розв'язком задачі синтезу є будь-яке керування $u(x)$ виду (2.12), де $a_1 < -\dfrac{9}{2}$. Зауважимо, що ми обираємо лише параметри a_1 та f_{22}, а інші розраховуємо з (2.13) за формулами: $f_{11} = -a_1 f_{22}, f_{12} = 2f_{22}$ і нерівності (2.14) має бути виконано.

Наприклад, оберемо $a_1 = -6, f_{22} = 1$, тоді $f_{11} = 6, f_{12} = 2$, умови (2.14) виконано. Маємо $a_0 = \dfrac{1}{18}$. Отримаємо рівняння відносно Θ

$$\frac{1}{9}\Theta^4 = 6x_1^2 + 4x_1 x_2 \Theta + x_2^2 \Theta^2$$

Система має вигляд (2.10), де

$$u = -\frac{6x_1(t)}{\Theta^2} - \frac{3x_2(t)}{\Theta}.$$

Отже знайдено керування, яке задовільняє обмеженням і переводить будь-яку задану початкову в точку в початок координат за скінчений час. Нехай $\{1, 1\}$ початкова точка. Знайдемо траєкторію системи. Рівняння відносно Θ приймає вигляд

$$\frac{1}{9}\Theta^4 = 6 + 4\Theta + \Theta^2$$

Маємо єдиний додатній розв'язок $\Theta_0 = 4.4512$.

Відмітимо, як раніше було сказано, система (2.10) зводиться до рівняння типу Ейлера

$$(\Theta_0 - t)^2\ddot{x}_1 + 3(\Theta_0 - t)\dot{x}_1 + 6x_1 = 0.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $x_1(t) = (\Theta_0 - t)^\lambda$ та отримуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0.$$

Отримуємо корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2}$.

Маємо вираз для x_1

$$x_1(t) = (\theta_0 - t)^2 \left(c_1 \cos(\sqrt{2}\ln(\theta_0 - t)) + c_2 \sin(\sqrt{2}\ln(\theta_0 - t))\right).$$

З початкових умов $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ знаходимо $c_1 = 0.17, c_2 = 0.16$. Позначимо $\tau(t) = \sqrt{2}\ln(\Theta_0 - t)$. Нарешті, маємо розв'язок в аналітичному вигляді

$$x_1(t) = (\Theta_0 - t)^2(0.17\cos\tau(t) + 0.16\sin\tau(t)),$$
$$x_2(t) = -2(\Theta_0 - t)(0.29\cos\tau(t) + 0.04\sin\tau(t)).$$

Траєкторії приведені на Рис. 2.1 і час руху $\Theta_0 \approx 4.4512$.

2.1.2. Побудова функції керованості у тривимірному випадку

Аналогічно до попереднього випадку розглянемо розв'язання задачі синтезу.

Система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{2.15}$$

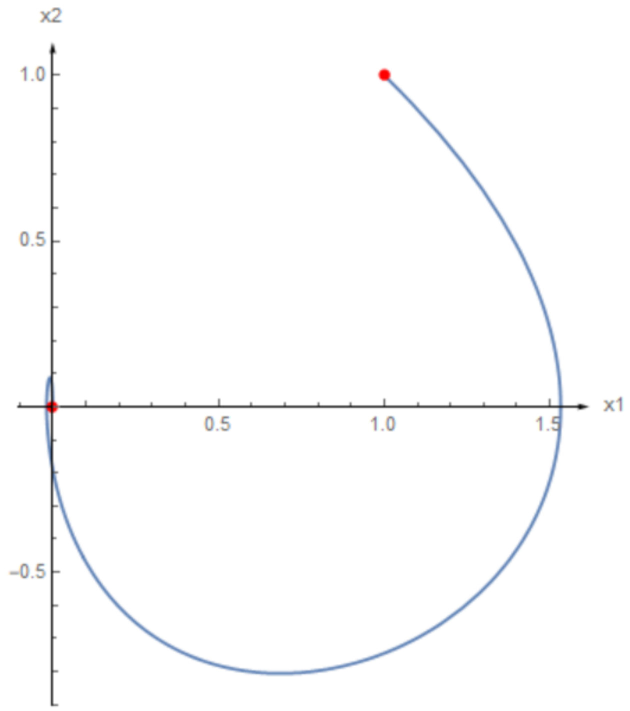


Рис. 2.1

Теорема 2.2. *Нехай*

$$a_1 < -\frac{75}{2}, f_{23} > 0,$$
$$\frac{15 f_{23}}{8} < f_{13} < -\frac{a_1 f_{23}}{20}. \tag{2.16}$$

Функція керованості $\Theta = \Theta(x)$ *при* $x \neq 0$ *визначена як єдиний додатній корінь рівняння (2.5), при* $x = 0$ *покладемо* $\Theta(0) = 0$.

Тоді керування вигляду

$$u = \frac{a_1 x_1(t)}{\Theta^3(x)} + \frac{(a_1 - 30)x_2(t)}{3\Theta^2(x)} - \frac{6x_3(t)}{\Theta(x)}. \tag{2.17}$$

переводить довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}^3$ *в початок координат за час* $\Theta(x_0)$.

У цьому випадку

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 + a_3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки дійсні частини власних значень рівні нулю, то у характеристичному рівнянні коефіцієнти при парних степенях λ рівні 0. Звідси $a_3 = -6, a_2 = \frac{1}{3}a_1 - 10$.

Розв'язуємо рівняння (2.9) та маємо

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}a_1 f_{13} & 2f_{13} - \frac{1}{5}a_1 f_{23} & f_{13} \\ 2f_{13} - \frac{1}{5}a_1 f_{23} & -f_{13} + (5 - \frac{1}{15}a_1) f_{23} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & \frac{1}{5} f_{23} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ a_1 & \frac{1}{3}a_1 - 10 & -5 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

З (2.7) розраховуємо F^1

$$F^1 = \begin{pmatrix} -2a_1 f_{13} & 10f_{13} - a_1 f_{23} & 4f_{13} \\ 10f_{13} - a_1 f_{23} & -4f_{13} + 4(5 - \frac{1}{15}a_1)f_{23} & 3f_{23} \\ 4f_{13} & 3f_{23} & \frac{2}{5}f_{23} \end{pmatrix}.$$

Застосовуємо критерій Сильвестра для F і F^1 та отримуємо (2.16).

Отже, з рівняння (2.5), де $y(\Theta(x), x) = (x_1\Theta^{-\frac{5}{2}}, x_2\Theta^{-\frac{3}{2}}, x_3\Theta^{-\frac{1}{2}})$ отримуємо (2.11). Та управління $u(x)$ виду (2.17) є розв'язком задачі синтезу. Зауважимо, що ми обираємо лише параметри a_1, f_{13} та f_{23}, а інші розраховуємо з (2.18) за формулами: $f_{11} = -\frac{1}{3}a_1 f_{13}, f_{12} = 2f_{13} - \frac{1}{5}a_1 f_{23}, f_{22} = -f_{13} + (5 - \frac{1}{15}a_1)f_{23}, f_{33} = \frac{1}{5}f_{23}$ і нерівності (2.16) має бути виконано.

Наприклад, оберемо $a_1 = -57, f_{13} = 2, f_{23} = \frac{19}{20}$, тоді $a_2 = -29, f_{11} = 38, f_{12} = \frac{1483}{100}, f_{22} = \frac{159}{25}, f_{33} = \frac{19}{100}$, умови (2.16) виконано. Маємо $a_0 = \frac{667}{259000}$. Отримаємо рівняння відносно Θ

$$\frac{667}{1295}\Theta^6 = 3800x_1^2 + 2966x_1x_2\Theta + (636x_2^2 + 400x_1x_2)\Theta^2 + 190x_2x_3\Theta^3 + 19x_3^2\Theta^4.$$

Система має вигляд (2.15), де

$$u = -\frac{57x_1(t)}{(\Theta_0 - t)^3} - \frac{29x_2(t)}{(\Theta_0 - t)^2} - \frac{6x_3(t)}{\Theta_0 - t}.$$

Отримане керування є розв'язком задачі синтеза. Нехай $\{1, 1, 1\}$ початкова точка. Як і раніше з рівняння відносно Θ отримуємо

$$\frac{667}{1295}\Theta^6 = 3800 + 2966\Theta + 1036\Theta^2 + 190\Theta^3 + 19\Theta^4$$

Маємо єдиний додатній розв'язок $\Theta_0 \approx 10.0131$.

Як і раніше з (2.15) отримуємо

$$(\Theta_0 - t)^3 \dddot{x}_1 + 6(\Theta_0 - t)^2\ddot{x}_1 + (10 - \frac{1}{3}a_1)(\Theta_0 - t)\dot{x}_1 - a_1x_1 = 0.$$

Шукаємо розв'язок у вигляді $x_1(t) = (\Theta_0 - t)^\lambda$ та для обраних параметрів маємо характеристичне рівняння

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 37\lambda + 57 = 0.$$

Отримуємо корені $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 3 \pm i\sqrt{10}$.

Тоді

$$x_1(t) = (\Theta_0 - t)^3(c_1 - c_2\cos\tau(t) - c_3\sin\tau(t))$$

та x_2, x_3 знаходимо як відповідно першу та другу похідні x_1.

З початкових умов знаходимо $c_1 = 0.017, c_2 = -0.005, c_3 = -0.016$. Позначимо $\tau(t) = \sqrt{10}\ln(\Theta_0 - t)$. Розв'язок в аналітичному вигляді

$$x_1(t) = (\Theta_0 - t)^3(0.017 - 0.005\cos\tau(t) - 0.016\sin\tau(t)),$$
$$x_2(t) = -3(\Theta_0 - t)^2(0.017 - 0.021\cos\tau(t) - 0.01\sin\tau(t)),$$
$$x_3(t) = 6(\Theta_0 - t)(0.017 - 0.038\cos\tau(t) + 0.024\sin\tau(t)).$$

Траєкторії приведені на Рис. 2.2 і час руху $\Theta_0 \approx 10.0131$.

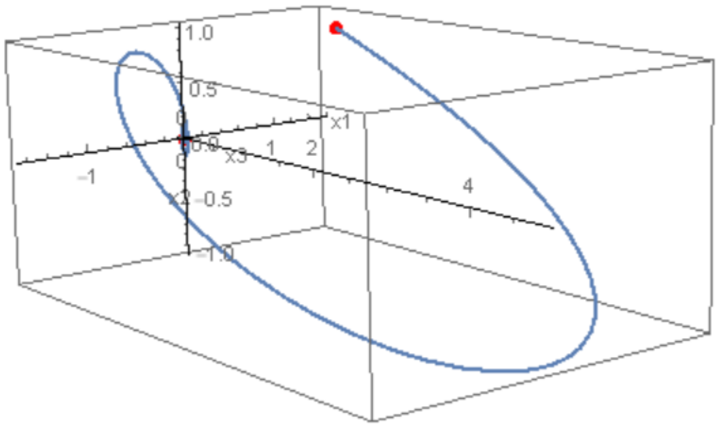


Рис. 2.2

Зауважимо, щоб користуватися методами описаними [2,3] у тривимірному просторі, матриця F^{-1} повинна мати представлення у вигляді $F^{-1} = D_3 C D_3$. Для цього матриця $D_3^{-1}F^{-1}D_3^{-1}$ має бути Ганкелевою. Це виконується лише за умови $f_{13} = 2f_{23}$. У нашому прикладі обрано параметри, для яких її не виконано.

2.1.3. Побудова функції керованості у випадку розмірності чотири

Розглянемо рішення задачі синтезу. Система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u. \end{cases} \tag{2.20}$$

Теорема 2.3. *Нехай*

$$a_1 < -\frac{3675}{8}, \quad \frac{1}{16}a_1 - 39 < a_3 < -23 - 2\sqrt{-a_1},$$

$$\frac{23+a3+\sqrt{4a_1+(23+a_3)^2}}{8a_1}f_{14}<f_{44}<\frac{23+a3-\sqrt{4a_1+(23+a_3)^2}}{8a_1}f_{14},\ \ f_{14}>0,$$

$$(30+a_3)(3a_1-49(30+a_3))f_{14}^2+6a_1(-2a_1+49(30+a_3))f_{14}f_{44}-441a_1^2f_{44}^2>0,$$

$$\frac{1}{2}(-a_1(155+6a_3)+2(30+a_3)(1770+49a_3))f_{14}^3+2(6a_1^2+98(30+a_3)^2(33+a_3)-$$
$$-a_1(8175+a_3(415+6a_3)))f_{14}^2f_{44}+a_1(-98(30+a_3)(636+17a_3)+$$
$$+3a_1(945+34a_3))f_{14}f_{44}^2-72a_1^2(3a_1-49(39+a_3))f_{44}^3>0,$$

$$\frac{1}{4}(f_{14}^2+4(21+a_3)f_{14}f_{44}-18a_1f_{44}^2)((5125-8a_1+130a_3)f_{14}^2+4(-a_1(107+6a_3)+$$
$$+49(1425+a_3(115+2a_3)))f_{14}f_{44}+2a_1(48a_1-49(633+16a_3))f_{44}^2)>0.$$

(2.21)

Функція керованості $\Theta=\ \Theta(x)$ при $x\neq 0$ визначена як єдиний додатній корінь рівняння (2.5), при $x=0$ покладемо $\Theta(0)=0$.

Тоді керування вигляду

$$u=\frac{a_1x_1(t)}{\Theta^4(x)}+\frac{7(30+a_3)x_2(t)}{\Theta^3(x)}+\frac{a_3x_3(t)}{\Theta^2(x)}-\frac{10x_3(t)}{\Theta(x)}. \tag{2.22}$$

переводить довільну точку $x_0\in\mathbb{R}^3$ в початок координат за час $\Theta(x_0)$.

Як і раніше, з характеристичного рівняння для A знаходимо $a_4=\ -10$, $a_2=7(30+a_3)$.

Розв'язуємо рівняння (2.9) та отримуємо $F=\{f_{ij}\}_{i,j=1}^4$

$$\begin{aligned}
f_{11}&=-\frac{a_1}{4}f_{14},\\
f_{12}&=-(30+a_3)f_{14}-3a_1f_{44},\\
f_{13}&=5f_{14}-a_1f_{44},\\
f_{22}&=-\frac{1}{4}(30+a_3)f_{14}+(a_1-49(30+a_3))f_{44},\\
f_{23}&=\frac{1}{2}f_{14}-7(12+a_3)f_{44},\\
f_{24}&=\frac{1}{4}f_{14}+21f_{44},\\
f_{33}&=-\frac{1}{4}f_{14}-(a_3-42)f_{44},\\
f_{34}&=9f_{44},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$A=\begin{pmatrix}4&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&2&1\\a_1&7(30+a_3)&a_3&-9\end{pmatrix}$$

та F^1 знаходимо з (2.7).

Користуємось критерієм Сильвестра для матриць F та F^1 та отримуємо (2.21).

Отже, з (2.5), де $y(\Theta(x), x) = (x_1\Theta^{-\frac{7}{2}}, x_2\Theta^{-\frac{5}{2}}, x_3\Theta^{-\frac{3}{2}}, x_4\Theta^{-\frac{1}{2}})$ отримуємо рівняння відносно $\Theta(x)$. Зауважимо, що ми обираємо лише параметри a_1, a_3, f_{14} та f_{44} так, щоб виконувались нерівності (2.21), а інші розраховуємо за формулами $a_2 = 7(30 + a_3), a_4 = -10$ та з (2.23).

Наприклад, оберемо параметри $a_1 = -550, a_3 = -73$ та $f_{14} = 75, f_{44} = 1$, умови (2.21) виконано. Тоді маємо $a_2 = -301, f_{11} = \dfrac{20625}{2}, f_{12} = 4875, f_{13} = 925, f_{22} = \dfrac{9453}{4}, f_{23} = \dfrac{929}{2}, f_{24} = \dfrac{159}{4}, f_{33} = \dfrac{385}{4}, f_{34} = 9$ та $a_0 = \dfrac{23}{6536}$. Рівняння відносно Θ

$$\begin{gathered}\frac{23}{3268}\Theta^8 = \frac{20625}{2}x_1^2 + 9750x_1x_2\Theta + (\frac{9453}{4}x_2^2 + 1850x_1x_3)\Theta^2 + \\ +(929x_2x_3 + 150x_1x_4)\Theta^3 + (\frac{385}{4}x_3^2 + \frac{159}{2}x_2x_4)\Theta^4 + 18x_3x_4\Theta^5 + x_4^2\Theta^6.\end{gathered} \tag{2.24}$$

Система має вигляд (2.20), де

$$u = -\frac{550x_1(t)}{(\Theta_0 - t)^4} - \frac{301x_2(t)}{(\Theta_0 - t)^3} - \frac{73x_3(t)}{(\Theta_0 - t)^2} - \frac{10x_4(t)}{\Theta_0 - t}.$$

Нехай $\{1, 1, 1, 1\}$ початкова точка. Як і раніше з (2.24) отримуємо

$$\frac{23}{1634}\Theta^8 = \frac{20625}{2} + 9750\Theta + \frac{16853}{4}\Theta^2 + 1079\Theta^3 + \frac{703}{4}\Theta^4 + 18\Theta^5 + \Theta^6.$$

Маємо єдиний додатній розв'язок $\Theta_0 \approx 19.2179$.

Систему (2.20) зводимо до рівняння типу Ейлера

$$(\Theta_0 - t)^4 \ddddot{x}_1 + 10(\Theta_0 - t)^3 \dddot{x}_1 - a_3(\Theta_0 - t)^2\ddot{x}_1 - 7(30 + a_3)(\Theta_0 - t)\dot{x}_1 - a_1x_1 = 0.$$

Аналогічно шукаємо розв'язок у вигляді $x_1(t) = (\Theta_0 - t)^\lambda$, маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - 16\lambda^3 + 114\lambda^2 - 400\lambda + 550 = 0.$$

та його корені $\lambda_{1,2} = 4 \pm i\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}, \lambda_{3,4} = 4 \pm i\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$.

Отримуємо

$$x_1(t) = (\Theta_0 - t)^4(c_1 \cos\beta_1\tau(t) + c_2 \sin\beta_1\tau(t) + c_3 \cos\beta_2\tau(t) + c_4 \sin\beta_2\tau(t)),$$

x_2, x_3 та x_4 розраховуємо як похідні x_1.

З початкових умов маємо $c_1 = 0.0083, c_2 = 0.0015, c_3 = 0.00005, c_4 = 0.0011$. Позначимо $\tau(t) = \ln(\Theta_0 - t)$, $\beta_1 = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$, $\beta_2 = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$. Отримано розв'язок в аналітичному вигляді

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= (\Theta_0 - t)^4(0.0083 \cos\beta_1\tau(t) + 0.0015 \sin\beta_1\tau(t) + 0.00005 \cos\beta_2\tau(t) + 0.0011 \sin\beta_2\tau(t)) \\
x_2(t) &= -4(\Theta_0 - t)^3(0.0085 \cos\beta_1\tau(t) - 0.0003 \sin\beta_1\tau(t) + 0.0011 \cos\beta_2\tau(t) - 0.0012 \sin\beta_2\tau(t)) \\
x_3(t) &= 12(\Theta_0 - t)^2(0.0086 \cos\beta_1\tau(t) - 0.0014 \sin\beta_1\tau(t) + 0.0028 \cos\beta_2\tau(t) - 0.0004 \sin\beta_2\tau(t)) \\
x_4(t) &= -24(\Theta_0 - t)(0.0082 \cos\beta_1\tau(t) - 0.0039 \sin\beta_1\tau(t) + 0.0020 \cos\beta_2\tau(t) - 0.0064 \sin\beta_2\tau(t)).
\end{aligned}$$

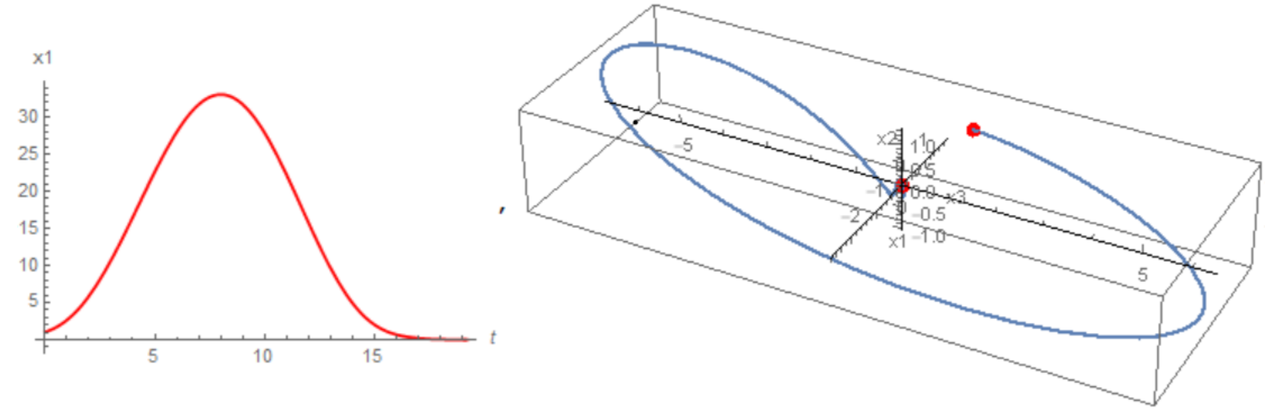


Рис. 2.3

Траєкторії приведені на Рис. 2.3 і час руху $\Theta_0 \approx 19.2179$.

Зауважимо, щоб користуватися методами описаними [2,3] матриця F^{-1} повинна мати представлення у вигляді $F^{-1} = D_4 C D_4$. Це виконується лише за умов $f_{14} = 84 f_{44}$ та $a_3 = -40 + \dfrac{5}{84} a_1$. В нашому прикладі обрано параметри, які не задовільняють цим умовам.

Висновки

Дана робота була присвячена методу функції керованості в задачах допустимого синтезу для лінійних канонічних систем. В роботі були розглянуті способи побудови такого керування, щоб функція керованості була часом руху.

Результатом стало знаходження множини параметрів для двовимірної, тривимірної та чотиривимірної канонічних систем, для яких значення функції керованості буде часом руху довільної точки в початок координат.

Список використаних джерел

[1] V. I. Korobov, A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem, Math. USSR-Sb.,37:4 (1980), 535-557

[2] V. I. Korobov, A. E. Choque Rivero, V.O. Skoryk: Controllability function as time of motion I, Mat. Fiz. Anal. Geom., 11(2), (2004), 208-225

[3] V. I. Korobov, A. E. Choque Rivero, V.O. Skoryk: Controllability function as time of motion II, Mat. Fiz. Anal. Geom., 11(3), (2004), 341-354

[4] A. E. Choque-Rivero, Extended set of solutions of a bounded finite-time stabilization problem via the controllability function, IMA Journal of Mathematical Control and Information, Volume 38, Issue 4, December 2021, Pages 1174?1188, https://doi.org/10.1093/imamci/dnab028

[5] A. E. Choque-Rivero, Korobov's controllability function as time of motion: Extension of the solution set of the synthesis problem, Mat. Fiz. Anal. Geom., Volume 10, Pages 1-32,

[6] V. I. Korobov; G. M Sklyar. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. Differential Equations 26, no. 11, 1422–1431 (1991)

Додаток A.

In[1]:= $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ a1 & a2+1\end{pmatrix}$; $F=\begin{pmatrix}f11 & f12\\ f12 & f22\end{pmatrix}$; $II=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

In[2]:= `Collect[Det[A - λ II], λ]`

Out[2]= `2 - a1 + 2 a2 + (-3 - a2) λ + λ^2`

In[80]:= `a2 := -3`

In[9]:= `eq = Simplify[F.A + Transpose[F.A]]`

$$\begin{pmatrix}4\,f11+2\,a1\,f12 & f11+(a2+3)\,f12+a1\,f22\\ f11+(a2+3)\,f12+a1\,f22 & 2\,(f12+a2\,f22+f22)\end{pmatrix}$$

In[81]:= `Solve[eq == 0, {f11, f12}]`

Out[81]= `{{f11 → -a1 f22, f12 → 2 f22}}`

In[14]:= `FF = F /. {f11 → -a1 f22, f12 → 2 f22}`

$$\begin{pmatrix}-a1\,f22 & 2\,f22\\ 2\,f22 & f22\end{pmatrix}$$

In[82]:= `AA = A`

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ a1 & -2\end{pmatrix}$$

Будуємо F^1

In[19]:= $H=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

In[20]:= `Fa = FF - FF.H - H.FF`

$$\begin{pmatrix}-4\,a1\,f22 & 6\,f22\\ 6\,f22 & 2\,f22\end{pmatrix}$$

Критерій Сильвестра для F та F^1

In[97]:=
```
Simplify[Det[FF]]
Simplify[Det[Fa]]
```

Out[97]= `2 f22^2`

Out[98]= `12 f22^2`

In[21]:= `Reduce[(-a1 f22) > 0 && Det[FF] > 0 && Det[Fa] > 0]`

Out[21]= $f22 > 0\ \&\&\ a1 < -\frac{9}{2}$

Рівн. відносно тета

`Dth = DiagonalMatrix[{θ^(-3/2), θ^(-1/2)}]; x = {x1, x2}; a = {a1, a2};`

In[115]:= `Fth = Dth.FF.Dth;`

$a0 = \text{Simplify}\left[\frac{1}{(\text{Inverse[FF].a.a} * 2)}\right];$

In[117]:= `ψ = Collect[(2 a0 θ - Fth.x.x) / f22 θ^3, θ]`

Out[117]= $a1\,x1^2 - 4\,x1\,x2\,\theta - x2^2\,\theta^2 - \frac{(4+a1)\,\theta^4}{a1\,(3+a1)}$

In[125]:=
```
x10 := 1
x20 := 1
ψ /. {x1 → x10, x2 → x20}
ψ1 = ψ /. {x1 → x10, x2 → x20, a1 → -6}
```

Out[127]= $a1 - 4\,\theta - \theta^2 - \dfrac{(4 + a1)\,\theta^4}{a1\,(3 + a1)}$

Out[128]= $-6 - 4\,\theta - \theta^2 + \dfrac{\theta^4}{9}$

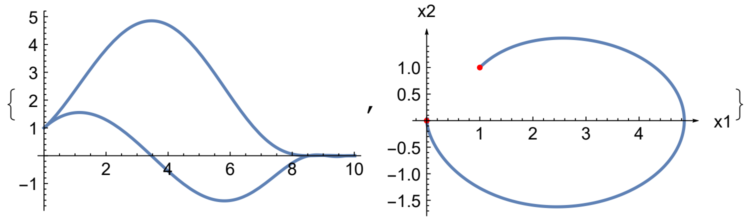
In[129]:=
```
NSolve[ψ1 == 0, θ, Reals]
```

Out[129]= $\{\{\theta \to -2.06072\}, \{\theta \to 4.4512\}\}$

In[133]:=
```
θ0 = 4.451198623210905`;
sol = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == -6 * x1[t] / (θ0 - t)^2 - 3 * x2[t] / (θ0 - t),
    x1[0] == x10, x2[0] == 1}, {x1, x2}, {t, 0, θ0}];
```

In[486]:=
```
pnts = ListPlot[{{1, 1}, {0, 0}}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
plt = ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}, Axes → True];
{Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}], Show[plt, pnts,
  AxesLabel → {"x1", "x2"}, AxesStyle → Arrowheads[0.02], AxesOrigin → {0, 0}]}
```

Out[488]=



Аналітичний розв’язок

In[143]:=
```
Simplify[λ (λ - 1) - 3 λ + 6]
```

Out[143]= $6 - 4\,\lambda + \lambda^2$

In[144]:=
```
Solve[λ^2 - 4 λ + 6 == 0, λ]
```

Out[144]= $\{\{\lambda \to 2 - i\sqrt{2}\}, \{\lambda \to 2 + i\sqrt{2}\}\}$

In[145]:=
```
f1[t_] = Simplify[(θ0 - t)^2 (c1 * Cos[Log[θ0 - t] √2] + c2 * Sin[Log[θ0 - t] √2] )];
f2[t_] = Simplify[D[f1[t], t]];
```

In[147]:=
```
Solve[{f1[0] == x10, f2[0] == x20}, {c1, c2}]
```

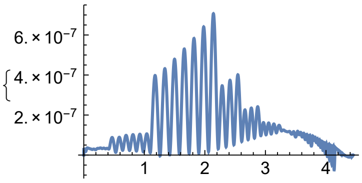
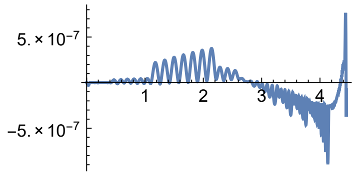
Out[147]= $\{\{c1 \to 0.171385,\ c2 \to 0.161811\}\}$

In[148]:=
```
y1[t_] = f1[t] /. {c1 → 0.17138473594508405`, c2 → 0.16181108689020454`}
y2[t_] = f2[t] /. {c1 → 0.17138473594508405`, c2 → 0.16181108689020454`}
```

Out[148]= $(-4.4512 + t)^2 \left(0.171385\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Log}[4.4512 - 1.\,t]\right] + 0.161811\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Log}[4.4512 - 1.\,t]\right]\right)$

Out[149]= $2.\,(-4.4512 + t) \left(0.285802\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Log}[4.4512 - 1.\,t]\right] + 0.0406238\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Log}[4.4512 - 1.\,t]\right]\right)$

```
In[151]:= {Plot[y1[t] - x1[t] /. sol, {t, 0, θ0}],
  Plot[y2[t] - x2[t] /. sol, {t, 0, θ0}]
 }
```

Out[151]= {  ,  }

Додаток Б.

In[309]:= $F = \begin{pmatrix} f11 & f12 & f13 \\ f12 & f22 & f23 \\ f13 & f23 & f33 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ a1 & a2 & a3+1 \end{pmatrix}$; $EE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

In[313]:= `Collect[Det[A - λ * EE], λ]`

Out[313]= $6 + a1 - 3\,a2 + 6\,a3 + (-11 + a2 - 5\,a3)\,\lambda + (6 + a3)\,\lambda^2 - \lambda^3$

In[436]:= `a3 := -6;`

In[308]:= `Clear[a1, a2, a3]`

In[446]:= `AA = A /. a2 -> -10 +` $\frac{a1}{3}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ a1 & \frac{a1}{3} - 10 & -5 \end{pmatrix}$$

In[451]:= `Simplify[Solve[F.AA + Transpose[F.AA] == 0, {f11, f12, f22, f33}]]`

Out[451]= $\left\{\left\{f11 \to -\frac{a1\,f13}{3},\ f12 \to 2\,f13 - \frac{a1\,f23}{5},\ f22 \to -f13 + 5\,f23 - \frac{a1\,f23}{15},\ f33 \to \frac{f23}{5}\right\}\right\}$

In[440]:= `FF = Simplify[`

$F\ /.\ \left\{f11 \to -\frac{a1\,f13}{3},\ f12 \to 2\,f13 - \frac{a1\,f23}{5},\ f22 \to -f13 + 5\,f23 - \frac{a1\,f23}{15},\ f33 \to \frac{f23}{5}\right\}]$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(a1\,f13) & 2\,f13 - \frac{a1\,f23}{5} & f13 \\ 2\,f13 - \frac{a1\,f23}{5} & -f13 + 5\,f23 - \frac{a1\,f23}{15} & f23 \\ f13 & f23 & \frac{f23}{5} \end{pmatrix}$$

Будуємо F^1

In[441]:= `H = DiagonalMatrix[{-5/2, -3/2, -1/2}];`
`Fa = Simplify[FF - FF.H - H.FF]`

$$\begin{pmatrix} -2\,a1\,f13 & 10\,f13 - a1\,f23 & 4\,f13 \\ 10\,f13 - a1\,f23 & -4\,f13 - \frac{4}{15}(a1 - 75)\,f23 & 3\,f23 \\ 4\,f13 & 3\,f23 & \frac{2\,f23}{5} \end{pmatrix}$$

Критерій Сильвестра для F та F^1

In[455]:= $det1 = -\frac{1}{3}(a1\,f13)$; $det2 = Det\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(a1\,f13) & 2\,f13 - \frac{a1\,f23}{5} \\ 2\,f13 - \frac{a1\,f23}{5} & -f13 + 5\,f23 - \frac{a1\,f23}{15} \end{pmatrix}\right]$; `det3 = Det[FF];`

$det4 = Det\left[\begin{pmatrix} -2\,a1\,f13 & 10\,f13 - a1\,f23 \\ 10\,f13 - a1\,f23 & -4\,f13 - \frac{4}{15}(a1 - 75)\,f23 \end{pmatrix}\right]$; `det5 = Det[Fa];`

In[457]:= `Reduce[det1 > 0 && det2 > 0 && det3 > 0 && det4 > 0 && det5 > 0, {a1, f23, f13}]`

Out[457]= $a1 < -\frac{75}{2}\ \&\&\ f23 > 0\ \&\&\ \frac{15\,f23}{8} < f13 < -\frac{a1\,f23}{20}$

In[458]:= `Clear[x1, x2, x3]`

Рівн. відносно тета

In[459]:= $Dth = DiagonalMatrix\left[\left\{\theta^{-5/2}, \theta^{-3/2}, \theta^{-1/2}\right\}\right]$;

`x = {x1, x2, x3}; a = {a1, a2, a3} /. a2 -> -10 +` $\frac{a1}{3}$;

In[460]:=
```
Fth = Dth.FF.Dth;
a0 = Simplify[1/((Inverse[FF].a.a * 2))];
```

In[463]:=
```
ψ = Collect[(2 a0 θ - Fth.x.x) θ^5, θ]
```

Out[463]=
$$\frac{1}{3}\,\text{a1 f13 x1}^2 - 2\left(2\,\text{f13} - \frac{\text{a1 f23}}{5}\right)\text{x1 x2}\,\theta + \left(\left(\text{f13} - 5\,\text{f23} + \frac{\text{a1 f23}}{15}\right)\text{x2}^2 - 2\,\text{f13 x1 x3}\right)\theta^2 - 2\,\text{f23 x2 x3}\,\theta^3 - \frac{1}{5}\,\text{f23 x3}^2\,\theta^4 - \frac{3\,(5\,\text{f13} - 9\,\text{f23})\,(15\,\text{f13} + \text{a1 f23})\,\theta^6}{5\left(5\,(6 + \text{a1})^2\,\text{f13} - 9\,\text{a1}\,(12 + \text{a1})\,\text{f23}\right)}$$

In[474]:=
```
x10 := 1
x20 := 1
x30 := 1
ψ /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30}
ψ1 = Simplify[ψ /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30, a1 → -57, f13 → 2, f23 → 19/20}]
```

Out[477]=
$$\frac{\text{a1 f13}}{3} - 2\left(2\,\text{f13} - \frac{\text{a1 f23}}{5}\right)\theta + \left(-\text{f13} - 5\,\text{f23} + \frac{\text{a1 f23}}{15}\right)\theta^2 - 2\,\text{f23}\,\theta^3 - \frac{\text{f23}\,\theta^4}{5} - \frac{3\,(5\,\text{f13} - 9\,\text{f23})\,(15\,\text{f13} + \text{a1 f23})\,\theta^6}{5\left(5\,(6 + \text{a1})^2\,\text{f13} - 9\,\text{a1}\,(12 + \text{a1})\,\text{f23}\right)}$$

Out[478]=
$$-38 - \frac{1483\,\theta}{50} - \frac{259\,\theta^2}{25} - \frac{19\,\theta^3}{10} - \frac{19\,\theta^4}{100} + \frac{667\,\theta^6}{129\,500}$$

In[479]:=
```
NSolve[ψ1 == 0, θ, Reals]
```

Out[479]= $\{\{\theta \to -3.36397\}, \{\theta \to 10.0131\}\}$

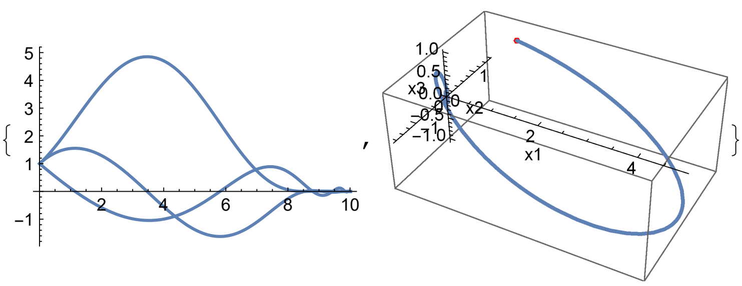
In[485]:=
```
a /. a1 → -57
```

Out[485]= $\{-57, -29, -6\}$

In[528]:=
```
θ0 = 10.0130749790015`;
sol =
  NDSolve[{Derivative[1][x1][t] == x2[t], Derivative[1][x2][t] == x3[t],
   Derivative[1][x3][t] == -(57 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 -
      (29 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 - (6 * x3[t]) / (θ0 - t),
   x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30}, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
```

In[530]:=
```
pnts = ListPointPlot3D[{{1, 1, 1}, {0, 0, 0}}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
plt = ParametricPlot3D[{x1[t], x2[t], x3[t]} /. sol, {t, 0, θ0}, Axes → True];
{Plot[{x1[t], x2[t], x3[t]} /. sol, {t, 0, θ0}],
 Show[plt, pnts, AxesLabel → {"x1", "x2", "x3"},
  AxesStyle → Arrowheads[0.02], AxesOrigin → {0, 0, 0}]}
```

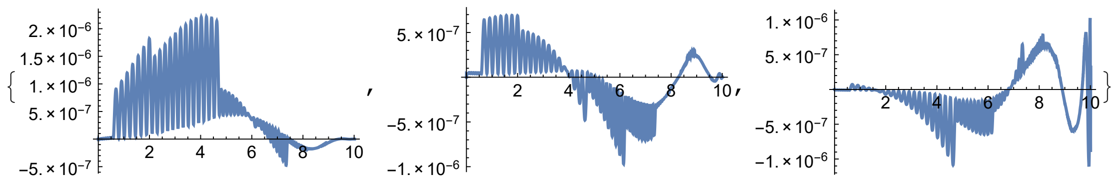
Out[532]=



Аналітичний розв’язок

```
In[495]:= Collect[-λ (λ - 1) (λ - 2) + 6 λ (λ - 1) - 29 λ + 57, λ]
Out[495]= 57 - 37 λ + 9 λ^2 - λ^3

In[496]:= Solve[57 - 37 λ + 9 λ^2 - λ^3 == 0, λ]
Out[496]= {{λ → 3}, {λ → 3 - ⅈ √10}, {λ → 3 + ⅈ √10}}

In[521]:= f1[t_] = Simplify[
            (θ0 - t) ^3 (c1 + c2 * Cos[Log[θ0 - t] √(10)] + c3 * Sin[Log[θ0 - t] √(10)] )];
          f2[t_] = Simplify[D[f1[t], t]];
          f3[t_] = Simplify[D[f1[t], {t, 2}]];

In[524]:= Solve[{f1[0] == x10, f2[0] == x20, f3[0] == x30}, {c1, c2, c3}]
Out[524]= {{c1 → 0.0168665, c2 → -0.00508885, c3 → -0.0155812}}

In[517]:= Clear[y1, y2, y3]

In[533]:= y1[t_] = f1[t] /. {c1 → 0.01686645942227257`,
             c2 → -0.005088853514265874`, c3 → -0.015581207846622765`};
          y2[t_] = f2[t] /. {c1 → 0.01686645942227257`,
             c2 → -0.005088853514265874`, c3 → -0.015581207846622765`};
          y3[t_] = f3[t] /. {c1 → 0.01686645942227257`,
             c2 → -0.005088853514265874`, c3 → -0.015581207846622765`};

In[536]:= {Plot[y1[t] - x1[t] /. sol, {t, 0, θ0}],
           Plot[y2[t] - x2[t] /. sol, {t, 0, θ0}],
           Plot[y3[t] - x3[t] /. sol, {t, 0, θ0}]
          }
```

Out[536]=




```
In[543]:= D3 = DiagonalMatrix[{1/2, -1, 1}];
          D3i = Inverse[D3];

In[545]:= Fi = Inverse[FF];
```

In[546]:= `Simplify[D3i.Fi.D3i]`

Out[546]=
$$\left\{\left\{-\frac{60\,f23}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)},\ -\frac{90\,f23}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)},\ \frac{150\,(f13-3\,f23)}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)}\right\},\left\{-\frac{90\,f23}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)},\ -\frac{75\,f13}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)},\ -\frac{150\,f13}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)}\right\},\left\{\frac{150\,(f13-3\,f23)}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)},\ -\frac{150\,f13}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)},\ \frac{5\,(5\,(-12+a1)\,f13-9\,a1\,f23)}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)}\right\}\right\}$$

In[547]:= **Solve**
$$\mathbf{Solve}\left[\frac{150\,(f13-3\,f23)}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)} == -\frac{75\,f13}{(5\,f13-9\,f23)\,(15\,f13+a1\,f23)},\ f13\right]$$

Out[547]= $\{\{f13\to 2\,f23\}\}$

In[564]:= `CC = Simplify[D3i.Inverse[FF].D3i /. f13 → 2 f23]`

$$\begin{pmatrix} -\frac{60}{a1\,f23+30\,f23} & -\frac{90}{a1\,f23+30\,f23} & -\frac{150}{a1\,f23+30\,f23} \\ -\frac{90}{a1\,f23+30\,f23} & -\frac{150}{a1\,f23+30\,f23} & -\frac{300}{a1\,f23+30\,f23} \\ -\frac{150}{a1\,f23+30\,f23} & -\frac{300}{a1\,f23+30\,f23} & \frac{5\,(a1-120)}{(a1+30)\,f23} \end{pmatrix}$$

Додаток В.

In[587]:= `Clear[a1, a2, a3, a4]`

$$F=\begin{pmatrix} f11 & f12 & f13 & f14\\ f12 & f22 & f23 & f24\\ f13 & f23 & f33 & f34\\ f14 & f24 & f34 & f44\end{pmatrix}; A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ a1 & a2 & a3 & a4+1\end{pmatrix}; EE = DiagonalMatrix[\{1, 1, 1, 1\}];$$

In[589]:= `Collect[Det[A - λ * EE], λ]`

Out[589]= $24 - a1 + 4\,a2 - 12\,a3 + 24\,a4 + (-50 - a2 + 7\,a3 - 26\,a4)\,\lambda + (35 - a3 + 9\,a4)\,\lambda^2 + (-10 - a4)\,\lambda^3 + \lambda^4$

In[657]:= `a4 := -10`

`Solve[-50 - a2 + 7 a3 - 26 a4 == 0, a2]`

Out[658]= $\{\{a2 \to 7\,(30 + a3)\}\}$

In[659]:= `AA = A /. a2 → 7 (30 + a3)`

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ a1 & 7\,(a3+30) & a3 & -9\end{pmatrix}$$

In[752]:= `Solve[Simplify[(F.AA + Transpose[F.AA])] == 0,`
`{f11, f12, f13, f24, f22, f23, f33, f34}]`

Out[752]= $\left\{\left\{f11 \to -\frac{a1\,f14}{4},\ f12 \to -30\,f14 - a3\,f14 - 3\,a1\,f44,\ f13 \to 5\,f14 - a1\,f44,\ f24 \to \frac{1}{4}\,(f14 + 84\,f44),\ f22 \to \frac{1}{4}\,(-30\,f14 - a3\,f14 - 5880\,f44 + 4\,a1\,f44 - 196\,a3\,f44),\ f23 \to \frac{1}{2}\,(f14 - 168\,f44 - 14\,a3\,f44),\ f33 \to \frac{1}{4}\,(-f14 + 168\,f44 - 4\,a3\,f44),\ f34 \to 9\,f44\right\}\right\}$

In[753]:= **FF = FullSimplify[**
F /. $\left\{f11 \to -\frac{a1\,f14}{4},\ f12 \to -30\,f14 - a3\,f14 - 3\,a1\,f44,\ f13 \to 5\,f14 - a1\,f44,\ f24 \to \frac{1}{4}\,(f14 + 84\,f44),\ f22 \to \frac{1}{4}\,(-30\,f14 - a3\,f14 - 5880\,f44 + 4\,a1\,f44 - 196\,a3\,f44),\ f23 \to \frac{1}{2}\,(f14 - 168\,f44 - 14\,a3\,f44),\ f33 \to \frac{1}{4}\,(-f14 + 168\,f44 - 4\,a3\,f44),\ f34 \to 9\,f44\right\}$]

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(a1\,f14) & -(a3+30)\,f14 - 3\,a1\,f44 & 5\,f14 - a1\,f44 & f14\\ -(a3+30)\,f14 - 3\,a1\,f44 & (a1 - 49\,(a3+30))\,f44 - \frac{1}{4}(a3+30)\,f14 & \frac{f14}{2} - 7\,(a3+12)\,f44 & \frac{1}{4}(f14 + 84\,f44)\\ 5\,f14 - a1\,f44 & \frac{f14}{2} - 7\,(a3+12)\,f44 & -\frac{f14}{4} - (a3-42)\,f44 & 9\,f44\\ f14 & \frac{1}{4}(f14 + 84\,f44) & 9\,f44 & f44\end{pmatrix}$$

Будуємо F^1

In[754]:= `H = DiagonalMatrix[{-7/2, -5/2, -3/2, -1/2}]; Fa = Simplify[FF - FF.H - H.FF]`

$$\begin{pmatrix} -2\,\text{a1 f14} & -7\,((\text{a3}+30)\,\text{f14}+3\,\text{a1 f44}) & 30\,\text{f14}-6\,\text{a1 f44} & 5\,\text{f14} \\ -7\,((\text{a3}+30)\,\text{f14}+3\,\text{a1 f44}) & \frac{3}{2}(4\,(\text{a1}-49\,(\text{a3}+30))\,\text{f44}-(\text{a3}+30)\,\text{f14}) & \frac{5}{2}(\text{f14}-14\,(\text{a3}+12)\,\text{f44}) & \text{f14}+84\,\text{f44} \\ 30\,\text{f14}-6\,\text{a1 f44} & \frac{5}{2}(\text{f14}-14\,(\text{a3}+12)\,\text{f44}) & -\text{f14}-4\,(\text{a3}-42)\,\text{f44} & 27\,\text{f44} \\ 5\,\text{f14} & \text{f14}+84\,\text{f44} & 27\,\text{f44} & 2\,\text{f44} \end{pmatrix}$$

Критерій Сильвестра для F та F^1

In[623]:=

$$\text{det1} = -\frac{\text{a1 f14}}{4};$$

$$\text{det2} = \text{Det}\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(\text{a1 f14}) & -(\text{a3}+30)\,\text{f14}-3\,\text{a1 f44} \\ -(\text{a3}+30)\,\text{f14}-3\,\text{a1 f44} & (\text{a1}-49\,(\text{a3}+30))\,\text{f44}-\frac{1}{4}(\text{a3}+30)\,\text{f14} \end{pmatrix}\right];$$

$$\text{det3} = \text{Det}\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(\text{a1 f14}) & -(\text{a3}+30)\,\text{f14}-3\,\text{a1 f44} & 5\,\text{f14}-\text{a1} \\ -(\text{a3}+30)\,\text{f14}-3\,\text{a1 f44} & (\text{a1}-49\,(\text{a3}+30))\,\text{f44}-\frac{1}{4}(\text{a3}+30)\,\text{f14} & \frac{\text{f14}}{2}-7\,(\text{a3}+1 \\ 5\,\text{f14}-\text{a1 f44} & \frac{\text{f14}}{2}-7\,(\text{a3}+12)\,\text{f44} & -\frac{\text{f14}}{4}-(\text{a3}-4 \end{pmatrix}\right.$$

`det4 = Det[FF];`

$$\text{det5} = \text{Det}\left[\begin{pmatrix} -2\,\text{a1 f14} & -7\,((\text{a3}+30)\,\text{f14}+3\,\text{a1 f44}) \\ -7\,((\text{a3}+30)\,\text{f14}+3\,\text{a1 f44}) & \frac{3}{2}(4\,(\text{a1}-49\,(\text{a3}+30))\,\text{f44}-(\text{a3}+30)\,\text{f14}) \end{pmatrix}\right];$$

$$\text{det6} = \text{Det}\left[\begin{pmatrix} -2\,\text{a1 f14} & -7\,((\text{a3}+30)\,\text{f14}+3\,\text{a1 f44}) & 3 \\ -7\,((\text{a3}+30)\,\text{f14}+3\,\text{a1 f44}) & \frac{3}{2}(4\,(\text{a1}-49\,(\text{a3}+30))\,\text{f44}-(\text{a3}+30)\,\text{f14}) & \frac{5}{2}(\text{f1} \\ 30\,\text{f14}-6\,\text{a1 f44} & \frac{5}{2}(\text{f14}-14\,(\text{a3}+12)\,\text{f44}) & -\text{f1} \end{pmatrix}\right.$$

`det7 = Det[Fa];`

In[629]:= `Reduce[det1 > 0 && det2 > 0 && det3 > 0 && det4 > 0]`

Out[629]=

$$\text{a3} < -55\ \&\&\ \frac{1}{4}\left(-529-46\,\text{a3}-\text{a3}^2\right) < \text{a1} < 624+16\,\text{a3}\ \&\&\ \text{f14} > 0\ \&\&$$

$$\frac{23\,\text{f14}+\text{a3 f14}}{8\,\text{a1}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{529\,\text{f14}^2+4\,\text{a1 f14}^2+46\,\text{a3 f14}^2+\text{a3}^2\,\text{f14}^2}{\text{a1}^2}} <$$

$$\text{f44} < \frac{23\,\text{f14}+\text{a3 f14}}{8\,\text{a1}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{529\,\text{f14}^2+4\,\text{a1 f14}^2+46\,\text{a3 f14}^2+\text{a3}^2\,\text{f14}^2}{\text{a1}^2}}$$

In[633]:=
```
FindInstance[det1 > 0 && det2 > 0 && det3 > 0 && det4 > 0 &&
  det5 > 0 && det6 > 0 && det7 > 0 && a1 == -550, {a1, a3, f14, f44}, Reals]
```

Out[633]= `{{a1 → -550, a3 → -73, f14 → 75, f44 → 1}}`

`Clear[x1, x2, x3, x4]`

Рівн. відносно тета

In[661]:=

$$\text{Dth} = \text{DiagonalMatrix}\left[\left\{\theta^{-7/2}, \theta^{-5/2}, \theta^{-3/2}, \theta^{-1/2}\right\}\right];$$

`x = {x1, x2, x3, x4}; a = {a1, a2, a3, a4} /. a2 → 7 (30 + a3);`

In[662]:= `Fth = Dth.FF.Dth;`

$$\text{a0} = \text{Simplify}\left[\frac{1}{(\text{Inverse[FF].a.a} * 2)}\right];$$

```
In[664]:= ψ = Collect[(2 a0 θ - Fth.x.x) θ^7, θ]
```

Out[664]=
$$\frac{1}{4}\,a1\,f14\,x1^2 - 2\,(-(30+a3)\,f14 - 3\,a1\,f44)\,x1\,x2\,\theta + \left(\left(\frac{1}{4}\,(30+a3)\,f14 - (a1-49\,(30+a3))\,f44\right)x2^2 - 2\,(5\,f14 - a1\,f44)\,x1\,x3\right)\theta^2 + \left(-2\left(\frac{f14}{2} - 7\,(12+a3)\,f44\right)x2\,x3 - 2\,f14\,x1\,x4\right)\theta^3 + \left(\left(\frac{f14}{4} + (-42+a3)\,f44\right)x3^2 + \frac{1}{2}\,(-f14 - 84\,f44)\,x2\,x4\right)\theta^4 - 18\,f44\,x3\,x4\,\theta^5 - f44\,x4^2\,\theta^6 + \left((a1-16\,(39+a3))\left(-f14^2 - 4\,(23+a3)\,f14\,f44 + 16\,a1\,f44^2\right)\theta^8\right) \Big/ \left(4\left(\left(a1^2 + a1\left(400+48\,a3+a3^2\right) - 16\left(39900+3520\,a3+103\,a3^2+a3^3\right)\right)f14 + 4\,a1\left(-a1\,(41+a3) + 4\left(6405+320\,a3+4\,a3^2\right)\right)f44\right)\right)$$

```
In[665]:= x10 := 1
x20 := 1
x30 := 1
x40 := 1
Collect[ψ /. {a1 -> -550, a3 → -73, f14 → 75, f44 -> 1}, θ]
ψ1 = Simplify[ψ /.
    {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30, x4 → x40, a1 -> -550, a3 → -73, f14 → 75, f44 -> 1}]
```

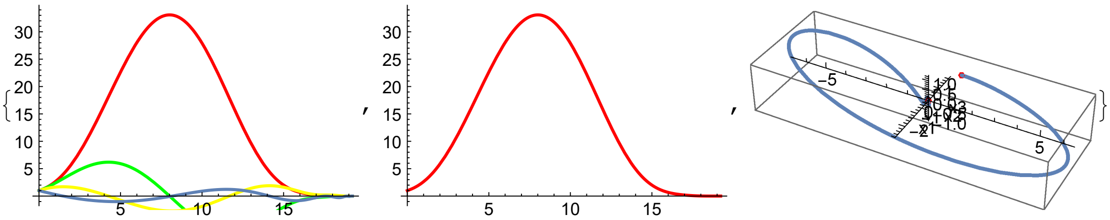
Out[669]=
$$-\frac{20\,625\,x1^2}{2} - 9750\,x1\,x2\,\theta + \left(-\frac{9453\,x2^2}{4} - 1850\,x1\,x3\right)\theta^2 + (-929\,x2\,x3 - 150\,x1\,x4)\,\theta^3 + \left(-\frac{385\,x3^2}{4} - \frac{159\,x2\,x4}{2}\right)\theta^4 - 18\,x3\,x4\,\theta^5 - x4^2\,\theta^6 + \frac{23\,\theta^8}{3268}$$

Out[670]=
$$-\frac{20\,625}{2} - 9750\,\theta - \frac{16\,853\,\theta^2}{4} - 1079\,\theta^3 - \frac{703\,\theta^4}{4} - 18\,\theta^5 - \theta^6 + \frac{23\,\theta^8}{3268}$$

```
In[671]:= NSolve[ψ1 == 0, θ, Reals]
Out[671]= {{θ → -3.77042}, {θ → 19.2179}}

In[672]:= a /. {a1 -> -550, a3 → -73}
Out[672]= {-550, -301, -73, -10}

In[721]:= θ0 = 19.217943672900645`;
sol1 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t], x3'[t] == x4[t],
    x4'[t] == -550 x1[t]/(θ0 - t)^4 - 301 x2[t]/(θ0 - t)^3 - 73 x3[t]/(θ0 - t)^2 - 10 x4[t]/(θ0 - t), x1[0] == x10,
    x2[0] == x20, x3[0] == x30, x4[0] == x40}, {x1, x2, x3, x4}, {t, 0, θ0}];
```

In[742]:=
```
pnts = ListPointPlot3D[{{1, 1, 1}, {0, 0, 0}}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
plt = ParametricPlot3D[{x2[t], x3[t], x4[t]} /. sol1, {t, 0, θ0}, Axes → True];
p1 = Plot[{y1[t]} /. sol, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Red];
p2 = Plot[{y2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green];
p3 = Plot[{y3[t]} /. sol, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Yellow];
p4 = Plot[{y4[t]} /. sol, {t, 0, θ0}];
{Show[p1, p2, p3, p4], p1, Show[plt, pnts, AxesLabel → {"x1", "x2", "x3"},
  AxesStyle → Arrowheads[0.02], AxesOrigin → {0, 0, 0}]}
```

Out[748]=



Аналітичний розв'язок

In[783]:=
```
Collect[λ (λ - 1) (λ - 2) (λ - 3) + a4 λ (λ - 1) (λ - 2) + 73 λ (λ - 1) - 301 λ + 550, λ]
```

Out[783]= $550 - 400\,\lambda + 114\,\lambda^2 - 16\,\lambda^3 + \lambda^4$

In[785]:=
```
Solve[550 - 400 λ + 114 λ^2 - 16 λ^3 + λ^4 == 0, λ]
```

Out[785]= $\left\{\left\{\lambda \to 4 - i\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}\right\}, \left\{\lambda \to 4 + i\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}\right\}, \left\{\lambda \to 4 - i\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}\right\}, \left\{\lambda \to 4 + i\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}\right\}\right\}$

In[786]:=
```
β1 = Sqrt[9 - 5 Sqrt[3]];
β2 = Sqrt[9 + 5 Sqrt[3]];
```

In[792]:=
```
f1[t_] = Simplify[(θ0 - t)^4 (c1 * Cos[β1 * Log[θ0 - t]] + c2 * Sin[β1 * Log[θ0 - t]] +
       c3 * Cos[β2 * Log[θ0 - t]] + c4 * Sin[β2 * Log[θ0 - t]])];
f2[t_] = Simplify[D[f1[t], t]];
f3[t_] = Simplify[D[f1[t], {t, 2}]];
f4[t_] = Simplify[D[f1[t], {t, 3}]];
```

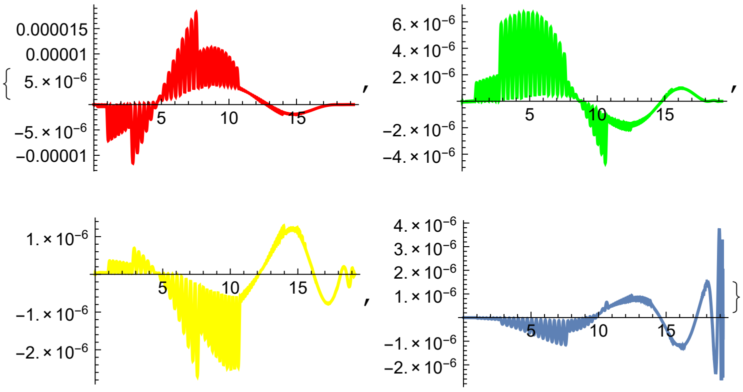
In[796]:=
```
Solve[{f1[0] == 1, f2[0] == 1, f3[0] == 1, f4[0] == 1}, {c1, c2, c3, c4}]
```

Out[796]=
```
{{c1 → 0.00829667, c2 → 0.0015019, c3 → -0.0000551513, c4 → 0.00114848}}
```

In[817]:=
```
x1[t_] = f1[t] /. {c1 → 0.008296672819015319`, c2 → 0.0015019001176810806`,
     c3 → -0.00005515126518209727`, c4 → 0.0011484825310246344`};
x2[t_] = f2[t] /. {c1 → 0.008296672819015319`, c2 → 0.0015019001176810806`,
     c3 → -0.00005515126518209727`, c4 → 0.0011484825310246344`};
x3[t_] = f3[t] /. {c1 → 0.008296672819015319`, c2 → 0.0015019001176810806`,
     c3 → -0.00005515126518209727`, c4 → 0.0011484825310246344`};
x4[t_] = Simplify[f4[t] /. {c1 → 0.008296672819015319`,
      c2 → 0.0015019001176810806`, c3 → -0.00005515126518209727`,
      c4 → 0.0011484825310246344`}];
```

In[821]:=
```
{ Plot[x1[t] - {y1[t]} /. sol, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Red],
  Plot[x2[t] - {y2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green],
  Plot[x3[t] - {y3[t]} /. sol, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Yellow],
  Plot[x4[t] - {y4[t]} /. sol, {t, 0, θ0}]}
```

Out[821]=



In[804]:=
```
D4 = DiagonalMatrix[{-1/6, 1/2, -1, 1}];
D4i = Inverse[D4];
```

In[806]:=
```
Fi = Inverse[FF];
```

In[807]:=
```
Simplify[D4i.Fi.D4i]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{144\,(f14+4\,(a3+39)\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2\right)} & -\frac{192\,(f14+4\,(a3+39)\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2\right)} & \frac{96\,((a1-28\,(a3+39))\,f44-3\,f14)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\right.} \\ -\frac{192\,(f14+4\,(a3+39)\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2\right)} & -\frac{64\,(4\,f14+a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2\right)} & -\frac{96\,(4\,f14+a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-1\right.} \\ \frac{96\,((a1-28\,(a3+39))\,f44-3\,f14)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2\right)} & -\frac{96\,(4\,f14+a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2\right)} & -\frac{4\,((a1-16\,(a3+30))\,f14+36\,a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-1\right.} \\ -\frac{288\,(2\,f14+(56\,(a3+39)-3\,a1)\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2\right)} & -\frac{8\,((16\,(a3+45)-a1)\,f14+24\,a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2\right)} & -\frac{8\,((a1-16\,(a3+30))\,f14+36\,a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\left(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-1\right.} \end{pmatrix}$$

In[814]:=

$$\text{Solve}\Big[\Big\{-\frac{64\,(4\,f14+a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\,(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2)} == \frac{96\,((a1-28\,(a3+39))\,f44-3\,f14)}{(a1-16\,(a3+39))\,(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2)},$$
$$-\frac{96\,(4\,f14+a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\,(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2)} == -\frac{288\,(2\,f14+(56\,(a3+39)-3\,a1)\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\,(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2)},$$
$$-\frac{8\,((16\,(a3+45)-a1)\,f14+24\,a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\,(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2)} == -\frac{4\,((a1-16\,(a3+30))\,f14+36\,a1\,f44)}{(a1-16\,(a3+39))\,(f14^2+4\,(a3+23)\,f44\,f14-16\,a1\,f44^2)}\Big\},\ \{f14,\ a3\}\Big]$$

Out[814]=

$$\left\{\left\{f14 \to 84\,f44,\ a3 \to \frac{5}{84}\,(-672+a1)\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{f14 \to 84\,f44,\ a3 \to \frac{5}{84}\,(-672+a1)\right\},\ \left\{f14 \to -\frac{a1\,f44}{4},\ a3 \to \frac{1}{16}\,(-624+a1)\right\}\right\}$$

In[816]:= `Simplify[D4i.Fi.D4i /. {f14 → 84 f44, a3 → 5/84 (-672 + a1)}]`

Out[816]=

$$\left\{\left\{-\frac{180}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{240}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{336}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{504}{336\,f44+a1\,f44}\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{240}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{336}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{504}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{840}{336\,f44+a1\,f44}\right\},$$
$$\left\{-\frac{336}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{504}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{840}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{1680}{336\,f44+a1\,f44}\right\},$$
$$\left.\left\{-\frac{504}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{840}{336\,f44+a1\,f44},-\frac{1680}{336\,f44+a1\,f44},\frac{-4200+a1}{(336+a1)\,f44}\right\}\right\}$$